

[This question paper contains 7 printed pages]

Roll No.

**ASME-23B-MAT-1**  
**MATHEMATICS (PAPER-1)**  
**गणित (पेपर-1)**

Time Allowed : 3 Hours

[Maximum Marks : 100

निर्धारित समय : 3 घंटे

अधिकतम अंक : 100

**QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS**

**प्रश्न पत्र संबंधी विशेष अनुदेश**

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions .  
उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें ।

1. There are EIGHT questions printed in both. English and Hindi.  
इसमें आठ प्रश्न हैं जो अंग्रेजी और हिन्दी दोनों में छपे हैं ।
2. Candidate has to attempt FIVE questions in all either in English or Hindi.  
उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में देने हैं ।
3. Question No. 1 is compulsory. Out of remaining seven questions, FOUR are to be attempted.  
प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है । शेष सात प्रश्नों में से चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
4. All questions carry equal marks. The number of marks carried by a question/ part are indicated against it.  
सभी प्रश्नों के समान अंक हैं । प्रत्येक प्रश्न / भाग के नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।
5. Write answers in legible handwriting. Illustrate your answers with suitable sketches and diagrams, wherever considered necessary.  
सुपाठ्य लिखावट में उत्तर लिखिए । जहाँ भी आवश्यक समझा जाए, वहाँ अपने उत्तरों को उपयुक्त रेखाचित्रों और आरेखों के साथ स्पष्ट कीजिए ।
6. Each part of the question must be answered in sequence and in the same continuation.  
प्रश्न के भाग का उत्तर उसी क्रम में दिया जाना चाहिए ।
7. Attempts of the questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in answer book must be clearly struck off.  
प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा नहीं गया हो । खाली छोड़े गए कोई भी पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए ।
8. Re-evaluation/ re-checking of answer book of the candidate is not allowed.  
उम्मीदवार की उत्तरपुस्तिका का पुनर्मूल्यांकन / पुनः जाँच की अनुमति नहीं है ।

1. (a) Show that the roots of the equation  $P_n(x)=0$  are real and lie between -1 and 1 where  $P_n(x)$  is Legendre's polynomial of degree  $n$  which is a positive integer. 04

सिद्ध करो की समीकरण  $P_n(x)=0$  के मूल वास्तविक हैं तथा -1 एवं 1 के बीच हैं जहां  $P_n(x)$ ,  $n$  कोटी का Legendre's बहुपद है।  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है।

- (b) Let the function  $f$  be continuous in real line  $IR$ . The show that the set  $A=\{x : f(x)=0\}$  is closed. 04

माना फलन  $f$ , वास्तविक रेखा  $IR$  में सतत है। तब सिद्ध करो कि समुच्चय  $A=\{x : f(x)=0\}$  एक बंद समुच्चय है।

- (c) For what values of  $a$  and  $b$ , is the vector field  $\vec{F} = (x+z)i + a(y+z)j + b(x+y)k$  a conservative field.

$a$  तथा  $b$  के किन मानों के लिए, सदिश क्षेत्र  $\vec{F} = (x+z)i + a(y+z)j + b(x+y)k$  एक रूढ़िवादी क्षेत्र है।

- (d) Give an example of a diagonalizable matrix that does not have distinct eigen values. 04

विकर्णीय आव्यूह का उदाहरण दीजिए जो कि भिन्न आभिलक्षणीक मान नहीं रखते।

- (e) A particle executes Simple Harmonic Motion of period 10 04  
second and amplitude 5 cm. Calculate the maximum  
amplitude of velocity.

एक कण 10 सेकंड तथा 5 सेमी आयाम का सरल आवर्त गति को  
निष्पादित करता है । तब गति का अधिकतम आयाम की गणना कीजिए।

2. (a) Using Cauchy Schwarz inequality, show that cosine of an 07  
angle is of absolute value at most 1.

Cauchy Schwarz इनईक्वालिटी का प्रयोग करते हुए, सिद्ध करो की  
कोज्या कोण का परम मान ज्यादा से ज्यादा 1 है ।

- (b) Let  $V$  be a finite Dimensional vector space and  $W$ , a 07  
subspace of  $V$ . Then Show that  $\dim A(W) = \dim V - \dim W$   
where  $A(W)$  is annihilator of  $W$ .

माना  $V$  एक परिमित विमीय सदिश समिष्ट है तथा  $W$ ,  $V$  का उपसमिष्ट  
है । तब सिद्ध करो कि  $\dim A(W) = \dim V - \dim W$  जहाँ  
 $A(W)$ ,  $W$  का एनहिलेटर है।

- (c) Find the equations of the lines in which the plane  $2x + y - z$  06  
 $= 0$  cuts the cone  $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$

रेखा का समीकरण ज्ञात करो जिसमें समतल  $2x + y - z = 0$  शंकू  $4x^2$   
 $- y^2 + 3z^2 = 0$  को काटता है ।

- 3 (a) Show that the radius of curvature of the lemniscate  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  at any point where tangent is parallel to the x-axis, is  $\sqrt{2}a/3$ . 07

सिद्ध करो की लेमनिस्केट  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  की वक्रता त्रिज्या किसी बिंदु पर जहां स्पर्श x-अक्ष के समानांतर है,  $\sqrt{2}a/3$  है

- (b) Evaluate  $\lim_{x \rightarrow 0} x^m (\log_e x)^n$ , where m, n are positive integers. 07

$\lim_{x \rightarrow 0} x^m (\log_e x)^n$  का मान ज्ञात करो जहां m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं।

- (c) Let  $T:V \rightarrow W$  be a linear transformation. Then show that 06  
 $Rank(T) + Nullity(T) = dim(V)$ .

मान लीजिए  $T:V \rightarrow W$  एक रेखीय रूपांतरण है तब सिद्ध करो कि  
 $Rank(T) + Nullity(T) = dim(V)$ .

4. (a) If  $u(x, y) = \sin^{-1} \left( \frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right)^{1/2}$ , then show that 10

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{144} \tan u (13 - \tan^2 u).$$

यदि  $u(x, y) = \sin^{-1} \left( \frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right)^{1/2}$ , तब सिद्ध करो

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{144} \tan u (13 + \tan^2 u)$$

- (b) Find the magnitude and the equations of the shortest distance between the lines 10

$$\frac{x}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z}{1} \text{ and } \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}$$

रेखाएँ  $\frac{x}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z}{1}$  तथा  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}$  के बीच का परिमाण तथा न्यूनतम दूरी के समीकरण ज्ञात करो

5. (a) Determine the general and singular solutions of the differential equation 07

$$9p^2(2-y)^2 = 4(3-y) \text{ where } p = \frac{dy}{dx}$$

अवकल समीकरण  $9p^2(2-y)^2 = 4(3-y)$  जहाँ  $p = \frac{dy}{dx}$  के व्यापक तथा विशेषण हल ज्ञात कीजिए।

- (b) Solve the differential equation 07

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = 0$$

in terms of Bessel functions.

अवकल समीकरण  $x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{2} = 0$  को बेसल फलन के रूप में हल कीजिए।

- (c) Using method of variation of parameters, solve the differential equation 06

$$(D^2 - 2D + 2)y = e^x \tan x \text{ where } D = \frac{d}{dx}$$

वेरीएशन ऑफ पैरामीटर विधि का प्रयोग करते हुए, अवकल समीकरण

$$(D^2 - 2D + 2)y = e^x \tan x \text{ where } D = \frac{d}{dx}$$

को हल करो

6. (a) Given  $\vec{F} = yi - z^3j + x^2k$ , use Stokes's theorem to evaluate  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  where C is the boundary of the area S formed by part of the plane  $2x + 4y + z = 4$  that lies in the first octant and integration around the boundary C is in the clockwise direction. 10

$\vec{F} = yi - z^3j + x^2k$  दिया है, स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करके  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  का मान ज्ञात करो जहां C, प्रथम चतुर्थांश में स्थित समतल  $2x + 4y + z = 4$  के द्वारा बने क्षेत्र S की सीमा है तथा समाकलन सीमा C के सापेक्ष दक्षिणावर्त में होना है।

- (b) Find the directional derivative of  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$  in the direction of the vector  $2i - j - 2k$  and determine its value at the point  $(1, -3, 2)$ . 10

सदिश  $2i - j - 2k$  के दिशा में फलन  $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2$  का दिशात्मक अवकल ज्ञात कीजिए तथा इसका मान बिंदु  $(1, -3, 2)$  पर ज्ञात कीजिए।

- 7 (a) Let V be the vector space of real valued functions  $y=f(x)$  satisfying 10

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

Then show that V is 3-dimensional vector space over IR

माना V, वास्तविक फलनों  $y=f(x)$  जो की समीकरण  $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$  को संतुष्ट करता है, का सदिश समष्टि है। टीवी सिद्ध करो कि V, IR पर 3-विमीय सदिश समष्टि है।

- (b) Three forces P, Q and R act on a particle and keep it in equilibrium. If the angle between P and Q and between Q and R each be  $120^\circ$ , then show that  $P = Q = R$  10

एक कण पर तीन बल P, Q और R कार्य करते हैं तथा इसे साम्यावस्था में रखते हैं। यदि प्रत्येक P तथा Q के बीच तथा एवं R के बीच कोण का  $120^\circ$  है तब सिद्ध करो कि  $P = Q = R$  .

- 8 (a) The particle performing Simple Harmonic Motion has a mass 2.5 gm and frequency of vibration 10 Hz. It is oscillation with an amplitude of 2 cm. Calculate the total energy of the particle. 10

सरल आवर्ती गति करते हुए कण का द्रव्यमान 2.5 ग्राम तथा कम्पन्न की आवृत्ति 10 Hz है। 2 cm आयाम का दोलन है। कण की कुल ऊर्जा की गणना कीजिए।

- (b) The motion of a particle under the influence of a central forces is described by  $r = a \sin \theta$ . Find an expression for the forces 10

केन्द्रीय बल के प्रभाव के अंतर्गत कण की गति  $r = a \sin \theta$  के द्वारा वर्णित की गई है। बल की अभिव्यक्ति ज्ञात कीजिए।